

岩土体大变形分析的 Cosserat-粒子有限元法

唐洪祥¹, 崔家铭², 张雪³, 张磊¹, 刘乐天⁴

(1. 大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 辽宁 大连 116024; 2. 中国电建集团 西北勘测设计研究院有限公司, 陕西 西安 710100; 3. 利物浦大学 土木工程与工业设计系, 英国 利物浦 L69 3BX; 4. 大连万达体育文化旅游开发有限公司, 辽宁 大连 116000)

摘要: 粒子有限元法 (PFEM) 既继承了有限元法坚实的数学基础, 又具有模拟大变形、复杂边界问题的能力, 在流固耦合、岩土工程领域有广泛的应用。但另一方面, 岩土体在大变形过程中往往具有应变软化特性和应变局部化现象, 为保持问题求解的适定性, 需要在本构方程中引入正则化机制, 采用 Cosserat 连续体理论是引入正则化机制有效方法之一。将 PFEM 计算方法与 Cosserat 连续体理论结合, 发展了 Cosserat-PFEM 方法。与传统 PFEM 中使用三角形单元不同, 提出的新方法将边界识别、网格划分相互独立进行, 使得四边形等单元的使用成为可能, 以提高数值求解的精度与克服三角形单元对应变局部化问题模拟的倾向性。算例表明, 本文发展的 Cosserat-PFEM 方法及基于 ABAQUS 软件开发的程序是可靠和有效的, 拓展了 PFEM 的应用范围, 具有模拟大变形问题并保持问题适定性的能力, 适用于大变形渐进破坏问题的模拟。

关键词: 粒子有限元; Cosserat 连续体; 边界识别; 大变形; 四边形单元

中图分类号: 文献标识码: A

作者简介: 唐洪祥(1973 -), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土力学与工程数值模拟方面的研究工作。E-mail: tanghx@dlut.edu.cn

Cosserat- Particle Finite Element Method for Large Deformation Analysis of rock and soil

TANG Hong-Xiang¹, CUI Jia-Ming², ZHANG Xue³, ZHANG Lei¹, LIU Le-Tian⁴

(1. Dalian University of Technology, State Key Laboratory of coastal and offshore engineering, Dalian, Liaoning, 116024, China;

2. Power Construction Corporation of China, Northwest Survey, design and Research Institute, Xian, Shanxi, 710100, China;

3. Department of Civil Engineering and Industrial Design, University of Liverpool, Liverpool, L69 3BX, UK;

4. Dalian Wanda sports culture tourism development company, Dalian, Liaoning, 116000, China)

Abstract: Particle finite element method (PFEM) not only inherits the solid mathematical foundation of finite element method, but also possesses the capability of modeling problems with large deformation and complex boundary, so it has been widely used in the fields of fluid-structure coupling and geotechnical engineering. While in the process of large deformation of rock and soil, strain softening and strain localization often occur. In order to keep the well-posedness for the large deformation problem, it is necessary to introduce regularization mechanism into the constitutive equation. Cosserat continuum theory is one of the effective methods to introduce regularization mechanism. Combining PFEM with Cosserat continuum theory, the Cosserat-PFEM method is developed. Besides, unlike traditional PFEM using triangular elements, in the Cosserat-PFEM method the boundary recognition and mesh generation are carried out independently, which makes it possible to use quadrilateral elements, so as to improve the numerical accuracy and overcome the tendency of triangular elements to simulate strain localization. The examples show that the Cosserat-PFEM method developed in this paper and the programme explored based on ABAQUS software are reliable and efficient, which expand the application scope of PFEM. They also demonstrate that the Cosserat-PFEM has the ability to simulate large deformation problems and keep the well-posedness of the problems, and is suitable for the simulation of large deformation and progressive failure problems.

Key words: Particle Finite Element Method; Cosserat continuum; boundary recognition; large deformation; Quadrilateral element

0 引 言

随着计算机技术的发展, 数值模拟在工程中的应用越来越广泛, 有限元法作为其中最具代表性的方法已经相对成熟, 在固体力学、流体力学等领域发挥着重要的作用。传统的有限元方法基于小变形理论, 采用有限的

单元对结构进行离散, 根据能量原理提出基本方程进行求解, 具有较高的精度和计算效率。但对于滑坡、基础贯入、触探等岩土工程问题, 其破坏过程常常伴随着较大变形的发生, 采用传统基于小变形

基金项目: 国家自然科学基金项目(51890912, 51979025)

理论的有限元法会出现网格扭曲、畸变, 导致计算误差较大甚至不收敛。

为了克服传统有限元方法在模拟岩土大变形问题时的局限性, 学者们提出了许多大变形数值方法。Hirt 等人提出了任意拉格朗日-欧拉法 (Arbitrary Lagrangian Eulerian, ALE), 这种方法使用网格来表征结构, 网格可以采用拉格朗日格式, 也可以采用欧拉格式, 或是任意可以减小网格畸变的形式^[1]。采用拉格朗日格式时, 网格与物质固连, 在大变形分析过程中需要通过网格更新、变量映射技术实现计算结果在不同分析步间的传递, 这种技术又称为 RITSS (Remeshing and Interpolation Technique with Small Strain) 技术^[2], 已被用于基础贯入^[3]等岩土大变形问题中; 采用欧拉格式的网格时, 计算过程中网格不产生变形, 通过网格的充填状态来反映物质流动, 多用于流体问题^[4]及贯入问题^[5]。不同格式的 ALE 方法的共性问题在于该方法中网格节点的拓扑关系固定, 无法模拟自由面剧烈变化的问题。另一种常用的大变形方法是无网格法^[6], 与 ALE 方法不同, 无网格法用粒子来表征结构, 这种处理优化了粒子间的拓扑关系, 适用于大变形、复杂接触等问题。无网格法中一点的状态是通过支持域内其他点构造逼近函数计算得到的, 不同的点支持域内包含的粒子数量不同, 逼近函数及其导数也不相同, 导致计算效率较低^[7], 同时无网格法采用质点积分而非高斯积分, 计算精度也较低。为了同时利用网格描述和粒子描述的优点, 一类新的数值模拟方法被提出, 其特点是采用粒子来表征物质, 计算过程在网格上进行, 典型的方法有物质点法 (Material Point Method, MPM) 和粒子有限元法 (Particle Finite Element Method, PFEM)。MPM 法中物质点携带所有的信息, 计算在背景欧拉网格上执行, 计算开始时信息首先由物质点映射到网格节点上, 计算完成后再由网格节点映射回物质点^[8]。在岩土工程领域, 物质点法已被用于滑坡等特大变形问题的模拟^[9,10], 该方法采用质点积分, 不可避免的会产生积分误差, 在应用时宜考虑其适用性。PFEM 法中每一增量分析计算都通过标准的有限元求解器进行, 继承了有限元方法在计算效率和精度上的优势; 同时由于采用粒子表征物质, 在自由面的刻画、复杂边界问题时也具备类似无网格方法的优势。PFEM 法首先由 Onate 等人提出, 运用于流体-结构相互作用问题^[11]。张雪将粒子有限元方法应用于固体力学领域, 模拟了颗粒柱坍塌^[12]、土质滑坡^[13]、海底滑坡^[14]等问题。Li 和 Zhang 引入约束 Delaunay 算法在 ABAQUS 中实现了 PFEM 流程, 对颗粒柱塌落及滑坡问题进行了模拟^[15]。Yuan 等编写 python 脚本在 ABAQUS 中实现了 PFEM 计算过程, 模拟了 T-bar 贯入、地基承载力、海底管道等问题^[16]。

另一方面, 岩土体在大变形过程中往往具有应变软化特性和应变局部化现象, 会导致有限元数值求解的不稳定及网格依赖性问题。为保持问题求解的稳定性, 需要在本构方程中引入正则化机制, 而采用 Cosserat 连续体理论是引入正则化机制有效方法之一^[17]。为此, 本文将 PFEM 计算方法与 Cosserat 连续体理论相结合, 发展了 Cosserat-PFEM 方法。此方法既具有 PFEM 法在处理大变形问题、刻画自由面变化方面的优势, 又能保持问题求解的稳定性, 适用于岩土体渐进破坏大变形的模拟。

1 Cosserat-PFEM 关键技术实现

1.1 Cosserat 连续体

以二维 Cosserat 连续体为例简要介绍其基本理论。与经典连续体相比, 在 Cosserat 连续体中引入了旋转自由度, 使得平面内每个点具有三个自由度 (即两个平动自由度, 一个转动自由度), 相应的位移、应力和应变定义如下:

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{w}_z]^T \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \frac{m_{zx}}{l_c}, \frac{m_{zy}}{l_c} \right]^T \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yx}, k_{zx} l_c, k_{zy} l_c \right]^T \quad (3)$$

式中: \mathbf{w}_z 为旋转自由度;

k_{zx}, k_{zy} 为微曲率;

m_{zx}, m_{zy} 为对偶应力;

l_c 为内部长度参数。

对于均质各向同性弹性体, Cosserat 连续体应力、应变满足胡克定律:

$$\sigma = D_e \varepsilon \quad (4)$$

$$D_e = \begin{pmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G+G_c & G-G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G-G_c & G+G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中 λ 为拉梅常数, 且有 $\lambda = 2G\nu/(1-2\nu)$, G, ν 分别为经典连续体中的剪切模量和泊松比; G_c 为 Cosserat 剪切模量。根据文^[17]对 G_c 和 l_c 的取值研究, 取 $G_c/G \geq 0.5$; 从细观本质上讲, 内部长度参数 l_c 的大小反映了土体颗粒尺寸及有关参数的影响, 在宏观有限元计算时, 取值原则是在保证正则化效果和数值计算收敛性的前提下尽量取小值, 经验取值为 0.01~0.1 倍的模型尺寸。

平衡方程和应变-位移关系为:

$$L^T \sigma + f = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon = Lu \quad (7)$$

式中, L 为微分算子矩阵:

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & l_c \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & l_c \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (8)$$

由上述理论描述可知, 在 Cosserat 连续体本构描述中引入了内部长度参数, 由此保持了应变局部化问题求解的适定性, 可以模拟剪切带破坏有关的岩土工程问题, 在此不再详述。

1.2 Cosserat-PFEM 方法实现

PFEM 法采用拉格朗日描述, 通过边界识别、网格重新划分、变量映射实现信息在新旧网格间的传递。本文将 Cosserat 连续体理论与 PFEM 结合, 对 ABAQUS 软件进行二次开发实现相关算法, 其计算流程如图 1 所示。首先建立 Cosserat 连续体有限元模型, 进行常规的小变形分析, 分析完成后导出变形后节点 (即粒子) 坐标; 然后利用边界识别程序对导出的粒子集进行边界识别获得新的计算域, 在新计算域内重新进行网格划分; 再通过变量映射技术将信息从旧网格映射到新网格上, 施加荷载和边界条件进行下一次小变形计算直到分析完成。下面对关键技术实现方法进行介绍。

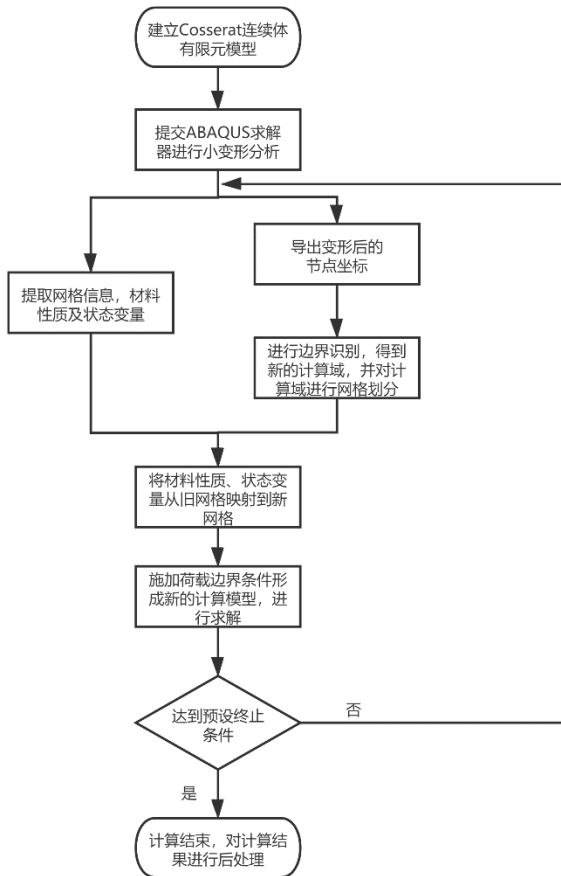
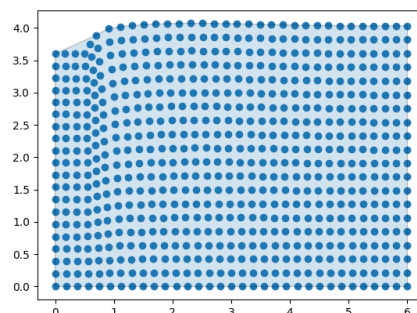


图 1 Cosserat-PFEM 分析流程图

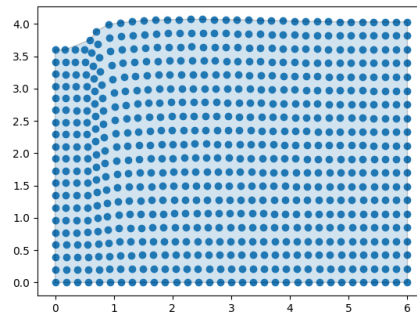
Fig.1 Cosserat-PFEM analysis flow chart.

1.3 边界识别技术

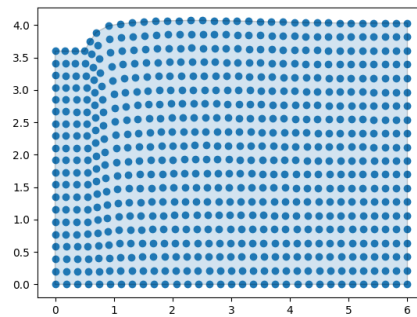
边界识别是 PFEM 方法中最重要的技术，识别的边界可以很好的反映分析过程中自由面的变化，也给荷载、边界条件的施加带来了便利。本文采用 α -shape 程序进行边界识别^[18]， α -shape 方法最早被应用于计算机图形学中，本文采用的是一种较为直接的实现形式。以二维情况为例， α -shape 法的基本法则如下：考虑二维空间中一系列具有特征间隔 h 的点集，如果能够找到一个半径大于 ah 的空心圆使得某些点均位于圆上（其中 α 是给定的参量，其值一般介于 1.3 到 1.6 之间），那么这些点就认为是边界点。针对同一组粒子集，不同 α 值识别得到的边界也不相同，会导致边界拾取的精确度不同，如图 2 所示的粒子集（后面 3.1 节中的地基承载力计算模型），当选取不同的 α 值时，边界拾取的效果也不相同。当 α 取 0.4 时，识别的边界包含了不属于计算域内的部分；随着 α 值的增大，识别的边界逐渐趋近于真实的边界，当 α 取 1.3 时边界最为理想； α 继续增大，开始逐渐有计算域内的点被舍弃，当 α 取 1.5 时，已有很大部分区域遗失。因此，在应用过程中应注意 α 的合理取值，以避免发生较大的物质损失。



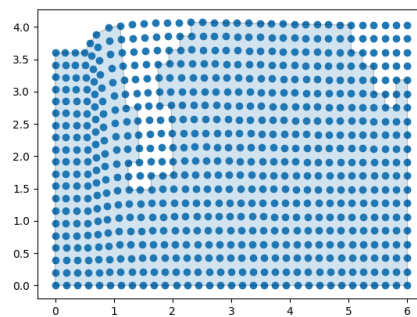
(a) $\alpha = 0.4$



(b) $\alpha = 1.0$



(c) $\alpha = 1.3$



(d) $\alpha = 1.5$

图2 α 取不同值时的边界识别结果

Fig.2 Boundary recognition results with different α

1.4 用户自定义单元及网格划分技术

网格划分是大变形分析中重要的一环，可通过 ABAQUS 内置网格生成方法来实现。需要注意的是前述边界识别技术是基于粒子间距离长短进行的，粒子分布的疏密对边界识别质量有很大影响，因此在网格划分时应尽量保证节点分布均匀。

由上可见，本文将边界识别和网格划分作为两个完全独立的过程进行，这摒弃了前人工作中 PFEM 法仅可采用三角形单元的限制，为采用多种单元类型打下了基础。

由于 ABAQUS 中没有内置的 Cosserat 单元，需要基于前述 Cosserat 连续体基本理论进行二次开发，即编写用户自定义单元子程序 UEL。考虑到三角形单元对应变局部化问题模拟具有一定的倾向性，本文使用了开发的四边形八节点 Cosserat 单元。

1.5 变量映射技术

变量映射过程是新旧网格间信息传递的桥梁，在大变形问题求解过程中，经常需要进行多次变量映射，应选用恰当的映射方法保证映射精度。

由于采用了用户自定义单元子程序 UEL，引入了新的自定义变量，变量映射无法直接通过 ABAQUS 自动进行。本文采用与 Map Solution 技术类似的映射原理，首先将旧单元积分点处的场变量计算结果外插到单元节点上，对于多个单元共用节点的情况进行平均化处理；随后进行网格重新划分，判断新网格高斯点在旧网格中的位置，再在旧网格中通过形函数插值得到新网格高斯点处的变量值^[19]。映射过程中所需要的数据文件有：新旧网格的节点信息、新旧网格的单元信息以及旧网格上的计算结果。

2 案例分析

2.1 塌落问题分析

为验证本文开发程序的正确性，首先模拟了与文^[12]类似的塌落问题。本文的工作将 Cosserat 连续体理论与 PFEM 结合，是基于对 ABAQUS 软件进行二次开发实现的。为了分析一般的岩土材料，而不仅仅是无粘性的颗粒材料，选择使用了 Drucker-Prager 本构模型，为了使计算分析可行，依据 ABAQUS 软件的特点，在参数的选择上与参考文献^[12]有所区别，其中主要参数（如内摩擦角、密度）一样，只是增加了很小的一个粘聚力值 0.1kPa，这对结果有点影响，但不大。

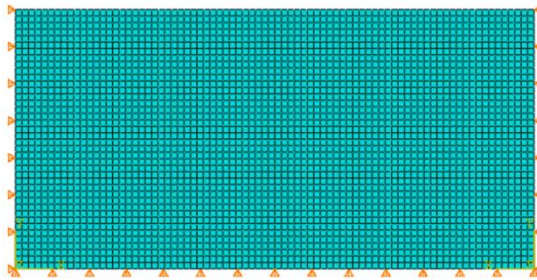


图3 计算模型

Fig.3 Schematic diagram of calculation model.

如图 3 所示，计算模型长 $L=8\text{m}$ ，高 $H=4\text{m}$ ，材料参数如表 1 所示。初始时刻，约束模型左右两侧边界的水平位移和底部的竖向位移，随后移除右侧的水平约束，模型在自重的作用下开始发生变形。本节考虑移除约束后 0-1s 内模型的变形状态，全过程共进行 18 次小变形分析，每次小变形分析完成后进行一次边界识别和网格重划分。

表 1 材料参数表

Tab.1 Parameters of the material				
弹性模量	泊松比	粘聚力	内摩擦角	密度
E/kPa	ν	c/kPa	$\varphi/^\circ$	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^3$
30000	0.35	0.1	19.0	1490

文^[12]显示，移除右端约束后，颗粒柱右端随即开始坍塌，刚开始短时间内变形较小，上表面存在一部分未扰动区；随着坍塌的进行，上表面的未扰动区逐渐减小；在整个坍塌过程中，颗粒柱左下角存在一个区域始终保持静止状态；当颗粒材料达到稳定状态时，最终构型的前段倾斜角非常接近内摩擦角。

本文不同时刻的变形和位移云图如图 4 所示。由图可见，右侧约束移除后的 0.1s 内，变形并不明显，这段时间主要是由起始的稳定状态向不稳定状态进行转变；0.25s 时，模型的右下方有了较明显的位移；0.5s 时，模型右下角有明显位移，达 1.54m，右上表面有相应的沉陷；0.75s 时右下角已产生 2.98m 的位移，此时已没有上、右边界的区分，两者已连成一条几近平滑的曲线；1.0s 时，右下角峰值位移已达到 4.66m，原来的上表面和右侧面变为一条平滑的自由面。这个过程反映了塌落破坏的全过程，这个过程与文^[12]的模拟结果高度相似，最后自由面的倾角约 21° ，略大于内摩擦角，这与非零的粘聚力有关。因此，总体上看变形过程、滑移线状态与文^[12]结果高度相似，说明了本文所提出的方法和开发的程序的可靠性。

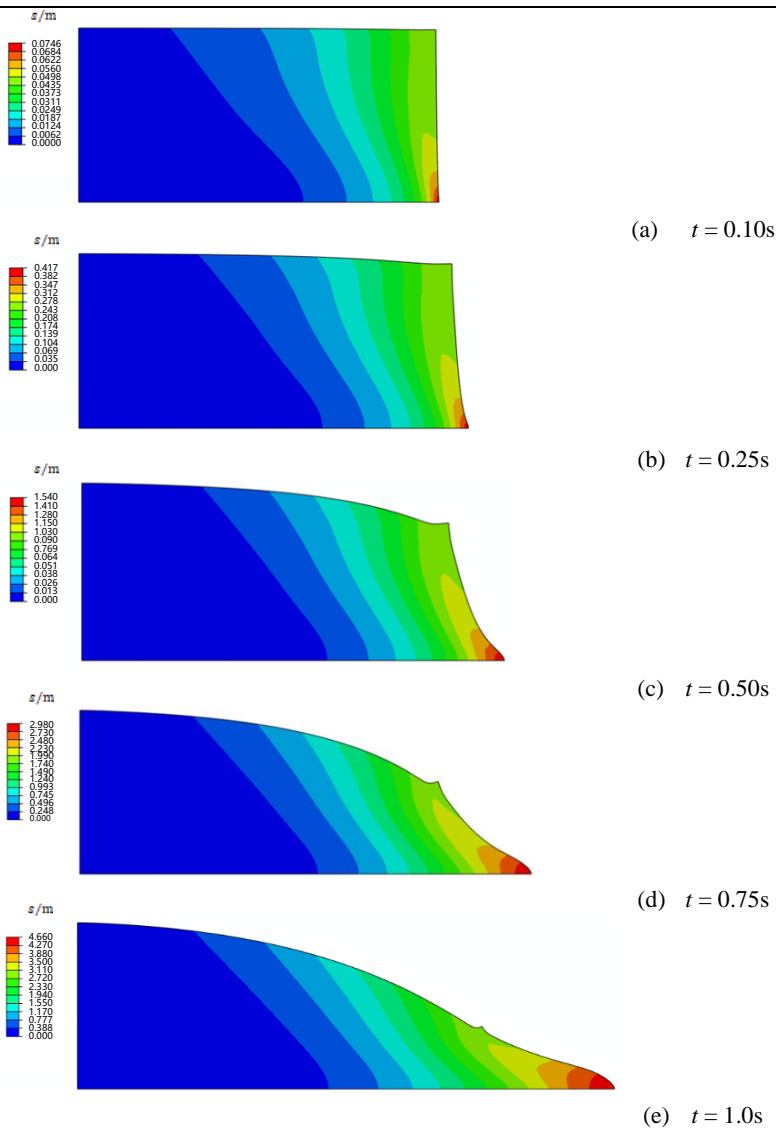


图4 不同时刻变形和位移 s 云图

Fig.4 Deformation and displacement contour at different moments.

2.2 地基承载力问题模拟

为验证本文实现的粒子有限元方法及不同单元的有效性，对地基承载力问题进行了模拟，并与前人的大变形研究结果^[20,21]进行了对比。

计算模型如图 5 所示，根据对称性取半结构进行模拟，简化为二维平面应变问题，模型左右两侧施加水平向约束，底部施加水平和竖向约束。基础宽 0.5m，地基长 6m，深 4m。土体采用理想弹塑性模型，不考虑自重，材料参数如表 2 所示，为了与已有的工作进行比较说明，计算参数选为与文献^[20, 21]一致。采用位移加载模式，加载过程中对基础施加竖直向下的位移，基础每下沉 0.1m，采用上述实现的 PFEM 方法进行边界识别和网格划分，直至基础下沉深度达到 0.5m。

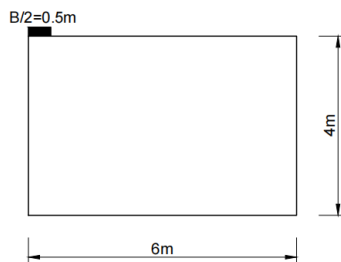


图5 计算模型示意图

Fig.5 Schematic diagram of calculation model.

表2 地基土材料参数

Tab.2 Parameters of the soil

参数	弹性模量E /kPa	泊松比 ν	抗剪强度 S_u /kPa
值	100	0.49	1

对于地基承载力问题，Nazem 等^[20]和 Tian 等^[21]分别采用 ALE 方法和 RITSS 技术进行过研究，将其结果绘制于图 6 中。这里 V 代表竖向荷载， B 是半基础宽， w 是基础的沉降， s_u 是土的抗剪强度，其中 B 和 s_u 取值都为 1，为了与其他文献中变化的 B 和 s_u 的归一化处理作对比，本文也采用了类似归一化处理的形式。Nazem 等^[19]的结果中，基础下沉约 0.22m 时，发生计算不收敛现象；Tian 等^[20]使用 RITSS 技术计算到基础下沉深度为 0.3m。以三角形单元为例，本文的计算下沉深度达到了预设的位移 0.5m，体现了 PFEM 法模拟大变形问题的优势。

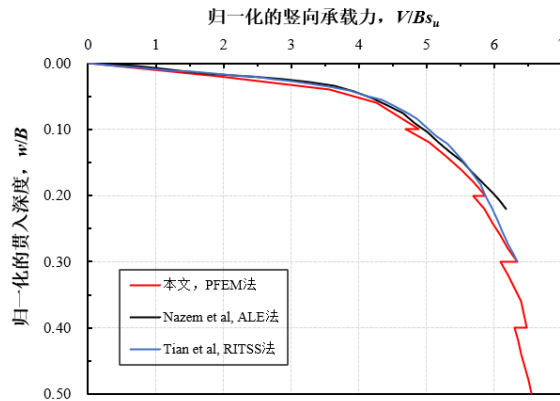


图6 承载力—贯入深度曲线图

Fig.6 Bearing capacity versus penetration depth curve.

现有的 PFEM 成果大多采用常规的三角形单元，这是由于 PFEM 最初被提出时，边界识别与网格划分存在于同一个过程中，边界识别前首先要生成 Delaunay 三角剖分，再对 Delaunay 三角进行处理得到边界，两者有着密不可分的关系，因此限制了单元类型的选择。张雪指出，对于固体力学大变形问题，在边界识别过程中生成的网格质量较差，难以满足计算要求^[12]。

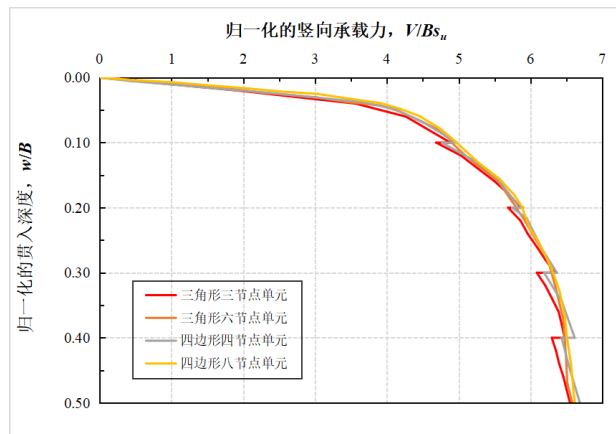


图7 不同单元类型对应承载力曲线图

Fig.7 Corresponding bearing capacity curves of different element types.

本文将边界识别和网格划分视为两个独立的过程，边界识别仅完成对离散粒子集边界的识别，得到边界后再像常规有限元方法一样对新计算域进行网格划分。分别使用 ABAQUS 内置的线性三角形单元、二阶三角形单元、线性四边形单元、二阶四边形单元对前述地基承载力问题进行模拟。不同单元类型下承载力-位移曲线如图 7 所示，结果表明各种单元计算结果差不多。

比较而言，线性三角形和四边形单元采用了选择减缩积分，总体精度较差，映射误差也更大一些，导致每次重新划分网格后承载力跳跃回落教大一些；而采用高阶单元时精度教高，曲线更光滑，同时可以克服网格自锁对结果的影响，更有利于岩土大变形和应变局部化问题的模拟。从承载力曲线看，与三角形单元相比，四边形单元的结果更接近高阶单元的结果，计算精度更高，两者比较采用四边形单元比三角形单元精度提高约6.5%。另外，从应变局部化的模拟上，采用三角形单元计算时倾向于发展与三角形单元本身倾斜方向一致的剪切带，也就是三角形单元网格排列的倾向会影响剪切带的发展，影响剪切带模拟的客观性。因而，本文后续算例采用了所发展的四边形八节点单元进行模拟。

另外，图6和图7中显示承载力位移曲线在重新划分网格后有台阶跳跃现象，这与重划网格后变量映射产生的误差有关，三角形单元更大一些。可以通过采用高阶单元提高精度、改进映射手段、减小重划步长进一步减小误差，当然，这样可能会增加计算工作量。

2.3 边坡渐进破坏分析

2.3.1 边坡分析模型

边坡分析模型如图8所示，在坡顶的基础上作用一竖向加载，边坡底部固定，右侧边界水平约束，竖向自由，材料参数如表3所示。此算例考虑粘聚力软化效应如下：

$$c = c_0 + h_p \varepsilon_p \quad (9)$$

式中： c_0 为初始粘聚力， ε_p 为为等效塑性应变， h_p 为粘聚力随塑性变形而软化的软化模量。

分别采用三种尺寸的网格，即0.2m、0.3m、0.4m进行计算，以考虑网格尺寸对计算结果的影响。

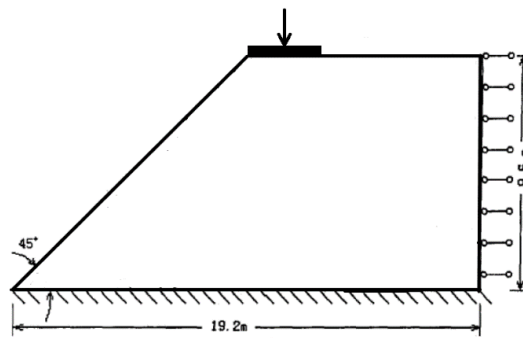


图8 计算模型示意图

Fig.8 Schematic diagram of calculation model.

表3 材料参数表

Tab.3 Parameters of the soil

材料参数	值	材料参数	值
弹性模量E /kPa	50000	内摩擦角 φ /°	25
泊松比 ν	0.30	剪胀角 ψ /°	0
初始粘聚力 c_0 /kPa	50	Cosserat剪切模量 G_c /kPa	10000
粘聚力软化模量 h_p /kPa	-30	内部长度参数 l_c /m	0.06

2.3.2 计算结果分析

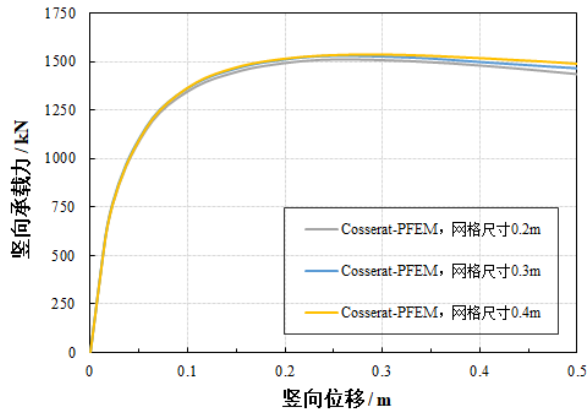
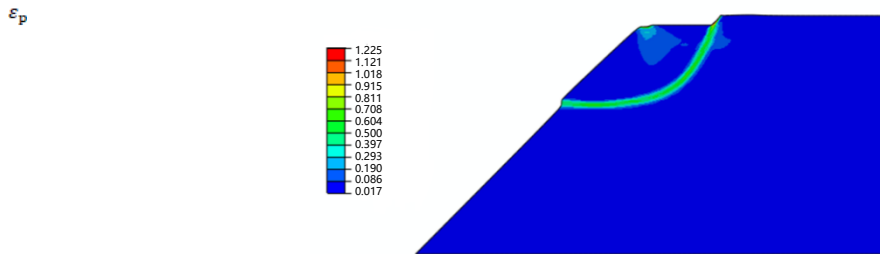


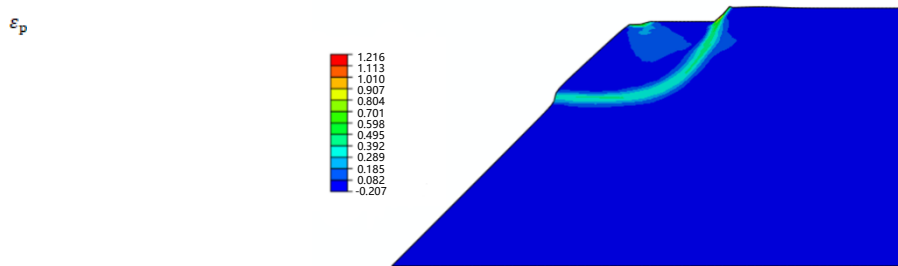
图9 Cosserat-PFEM 法荷载位移曲线

Fig.9 Load-displacement curves of the Cosserat-PFEM method

计算预设指定向下的位移为 0.5m，首先采用 Cosserat-PFEM 方法进行分析，图 9 给出了三种网格下的荷载位移曲线，图 10 给出了三种网格下坡顶指定位移为 0.5m 时的等效塑性应变图。可见，三种网格下 Cosserat-PFEM 法分析得到的结果较为一致，显示了与网格无关的结果。文^[17]中做了类似的边坡渐进破坏算例分析，只不过采用的是小变形的分析方法，这里的 Cosserat-PFEM 大变形模拟得到剪切带渐进破坏过程及克服了网格依赖性的特性与文^[17]的结果是一致的。为了显示 Cosserat-PFEM 方法的优越性，图 11 和图 12 给出了常规 FEM 和 PFEM 方法分析得到的 0.2m 和 0.4m 两种网格尺寸下的荷载位移曲线，可见具有应变软化和非关联塑性的岩土材料，会表现出过早的分叉，数值计算较早的遇到困难，在本例条件下难以越过承载力峰值完成完整破坏过程的分析，而且数值解具有明显的网格依赖性。比较而言，Cosserat 连续体理论由于在本构方程中引入了正则化机制，可以计算达到 0.5m 的收敛位移，这充分显示在岩土体大变形分析中引入正则化机制的重要性。当然，图 11 和 12 也表明，与 FEM 相比，总体上 PFEM 能计算到更大的变形。

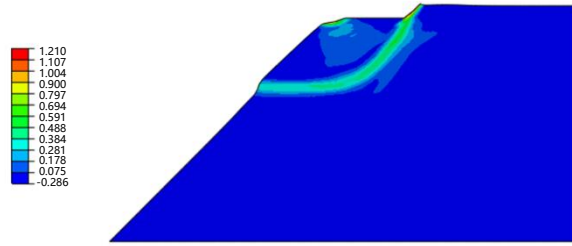


(a) 网格尺寸 0.2m



(b) 网格尺寸 0.3m

ε_p



(c) 网格尺寸 0.4m

图 10 Cosserat-PFEM 计算终止时等效塑性应变图

Fig.10 Equivalent plastic strain diagram at the end of calculation with Cosserat-PFEM.

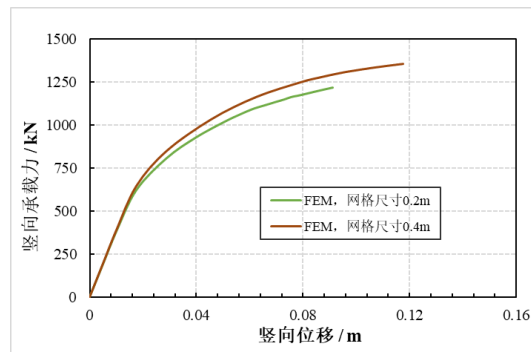


图 11 FEM 法荷载位移曲线

Fig.11 Load-displacement curves of the FEM method.

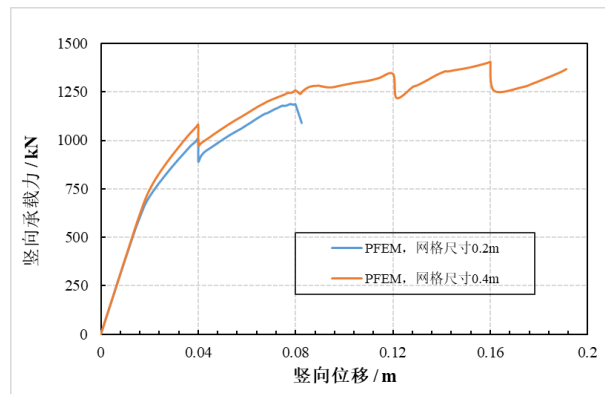


图 12 PFEM 法荷载位移曲线

Fig.12 Load-displacement curves of the PFEM method.

3 结 论

本文将 PFEM 计算方法与 Cosserat 连续体理论相结合, 发展了 Cosserat-PFEM 方法。同时, 将边界识别和网格划分视作是两个独立的过程, 采用了多种单元形态网格进行了大变形分析模拟, 得到如下结论:

(1) 提出并实现的 Cosserat-PFEM 方法既具有 PFEM 法解决大变形问题的优势又具有保持应变软化和应变局部化问题适应性的能力, 能较好的适用于大变形渐进破坏问题的模拟。

(2) 实现的算法中可以采用四边形等多形态单元, 与传统的三角形单元相比, 采用高阶四边形单元可以提高计算精度, 克服三角形单元对应变局部化问题模拟的倾向性。

应该指出, 由于映射误差的存在, 承载力位移曲线在重划网格和变量映射之后会出现跳跃, 除了采用高阶单元提高精度、减小重划步长进一步减小误差外, 应采取相应措施改进映射手段进一步减小误差, 这也是今后

努力的方向。

参考文献:

- [1] Hirt C W, Amsden A A, Cook J L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds[J]. *Journal of Computational Physics*, 1974, 14(2): 227-253.
- [2] Hu Y, Randolph M F. A practical numerical approach for large deformation problems in soil[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1998, 22(5): 327-350.
- [3] Yu L, Hu Y, Liu J, et al. Numerical study of spudcan penetration in loose sand overlying clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, 46: 1-12.
- [4] Noh B W F. CEL: A time dependent two space-dimensional, coupled Eulerian Lagrangian code[C]. *Methods of Computational Physics*, 1964.
- [5] Pucker T, Grabe J. Numerical simulation of the installation process of full displacement piles[J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, 45: 93-106.
- [6] Lucy L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *The Astrophysical Journal*, 1977, 8(12): 1013-1024.
- [7] 廉艳平, 张帆, 刘岩, 等. 物质点法的理论和应用[J]. *力学进展*, 2013, 43(2): 237-264. (Lian Yan-ping, Zhang Fan, Liu Yan, et al. Material point method and its applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(2): 237-264. (in Chinese))
- [8] Sulsky D, Chen Z, Schreyer H L. A particle method for history-dependent materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, 118(1-2): 179-196.
- [9] 孙玉进, 宋二祥. 大位移滑坡形态的物质点法模拟[J]. *岩土工程学报*, 2015, 37(7): 1218-1225. (SUN Yu-jin, SONG Er-xiang. Simulation of large-displacement landslide by material point method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, 37(7): 1218-1225. (in Chinese))
- [10] 高宇新, 朱鸿鹄, 张春新, 等. 砂土中锚板上拔三维物质点法模拟研究[J]. *岩土工程学报*, 2022, 44(2): 295-304. (GAO Yu-xin, ZHU Hong-hu, ZHANG Chun-xin, et al. Three-dimensional uplift simulation of anchor plates in sand using material point method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, 44(2): 295-304. (in Chinese))
- [11] Oñate E, Idelsohn S R, Pin F D, et al. The particle finite element method-an overview[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2004, 1(2): 267-307.
- [12] 张雪, 盛岱超. 一种模拟土体流动的连续体数值方法[J]. *岩土工程学报*, 2016, 38(3): 562-569. (ZHANG Xue, SHENG Dai-chao. Continuum approach for modelling soil flow in geotechnical engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, 38(3): 562-569. (in Chinese))
- [13] Zhang X, Sloan S W, Oate E. Dynamic modelling of retrogressive landslides with emphasis on the role of clay sensitivity[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2018, 124(2): 140-149.
- [14] Zhang X, Oñate E, Torres S A G, et al. A unified Lagrangian formulation for solid and fluid dynamics and its possibility for modelling submarine landslides and their consequences[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, 343(1): 314-338.
- [15] Li H C, Zhang S. Implement the particle finite element method in ABAQUS[J]. *Japanese Geotechnical Society Special Publication*, 2020, 8(3): 70-75.
- [16] Yuan W H, Wang H C, Zhang W, et al. Particle finite element method implementation for large deformation analysis using Abaqus[J]. *Acta Geotechnica*, 2021, 16: 2449-2462.
- [17] Tang H X, Guan Y H, Zhang X, et al. Low-order mixed finite element analysis of progressive failure in pressure-dependent materials within the framework of the Cosserat continua[J]. *Engineering Computations*, 2017, 34(2): 251 - 271.
- [18] Edelsbrunner H, Mücke E P. Three-Dimensional Alpha Shapes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 1994, 13(1): 43-72.
- [19] Hu Y, Randolph M F. H-adaptive FE analysis of elasto-plastic non-homogeneous soil with large deformation[J]. *Computers and Geotechnics*, 1998, 23: 61-83.
- [20] Nazem M, Carter J P, Airey D W. Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for dynamic analysis of geotechnical problems[J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, 36(4): 549-557.
- [21] Tian Y, Cassidy M J, Randolph M F, et al. A simple implementation of RITSS and its application in large deformation analysis[J]. *Computers and Geotechnics*, 2014, 56(5):160-167.